Θέματα πανελληνίων εξετάσεων Γ΄ Λυκείου θετικής κατεύθ.

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
γιά τό mathematica.gr

16 Μαΐου 2011

1. A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

   μον. 10

   A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στην περιοχή τού $+\infty$;

   μον. 5

   A3. *Νά χαρακτηρίσετε τίς προτάσεις πού ακολουθούν, γράφωντας στό τετράδιό σας τήν λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στό γράμμα πού αντιστοιχεί σέ κάθε πρόταση.*

   α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0 = 1$.

   β. Μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$, ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

   γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu\, x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\varphi\, x)' = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

   δ. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu\, x}{x} = 1$.

   ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

   μον. 10

2. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\overline{z} + 3i| = 2 \qquad \text{και} \qquad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}.$$

   B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

   μον. 7

   B2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z} + 3i = \dfrac{1}{z - 3i}$.

   μον. 4

B3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \leq w \leq 2$.
μον. 8

B4. Να αποδείξετε ότι: $|z - w| = |z|$.
μον. 6

3. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί την σχέση:

$$e^x \big(f'(x) + f''(x) - 1\big) = f'(x) + x\, f''(x)\,.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)\,,\ x \in \mathbb{R}$.
μον. 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
μον. 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.
μον. 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
μον. 7

4. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad g(x) > 0 \qquad (1)\,,$$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\, dt \qquad (2)\,,$$

$$\frac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}\, dt \qquad (3)\,.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι $f(x) = g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
μον. 9

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
μον. 4

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.
μον. 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f\left(t^2\right) dt\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.
μον. 7

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Λύσεις Θεμάτων

1. A1. Μαθηματικά Γ′ Λυκείου θετικής & τεχνολογικής κατεύθυνσης (Ο.Ε.Δ.Β.) ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat, σελ. 260. $\square$

   A2. Η η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στό $+\infty$, τότε και μόνο τότε, άν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \lambda x - \beta\right) = 0$. $\square$

   A3. α.⟶*Σωστό*, β.⟶*Σωστό*, γ.⟶*Λάθος*, δ.⟶*Λάθος*, ε.⟶*Σωστό*. $\square$

2. Για τούς μιγαδικούς αριθμούς z και w με $z \neq 3i$, ισχύουν:

$$|z-3i| + |\overline{z}+3i| = 2 \quad (1) \qquad \text{και} \qquad w = z - 3i + \frac{1}{z-3i} \quad (2)\,.$$

   B1. Επειδή $|\overline{z}+3i| = \left|\overline{z-3i}\right| = |z-3i|$, η (1) γίνεται $|z-3i| + |z-3i| = 2 \;\Rightarrow\; |z-3i| = 1 \quad (3)$. Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο τό $K(0,3)$ και ακτίνα ίση με 1. $\square$

   B2. $\dfrac{1}{z-3i} = \dfrac{\overline{z-3i}}{(z-3i)\,\overline{(z-3i)}} = \dfrac{\overline{z}-\overline{3i}}{|z-3i|^2} \overset{(3)}{=} \dfrac{\overline{z}-(-3i)}{1^2} = \overline{z}+3i$. $\square$

   B3. Λόγω του B2. η (2) γίνεται $w = z - 3i + \overline{z} + 3i = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \quad (4)$.

   Επειδή οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο τό $K(0,3)$ και ακτίνα ίση με 1, έπεται ότι $-1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq 2\,\mathrm{Re}(z) \leq 2 \;\Rightarrow\; -2 \leq w \leq 2$. $\square$

   B4. $|z-w| \overset{(4)}{=} |z-(z+\overline{z})| = |-\overline{z}| = |\,\overline{z}\,| = |z|$. $\square$

3. Γιά την δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν:

$$e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + x\,f''(x)\,, \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$\text{και} \qquad f'(0) = f(0) = 0 \qquad (2)$$

   Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $e^x - x > 0 \quad (*)$.

   Γ1. Η (1) γίνεται $e^x f'(x) - f'(x) + e^x f''(x) - x\,f''(x) = e^x \;\Rightarrow$

   $(e^x - x)'\,f'(x) + (e^x - x)\left(f'(x)\right)' = (e^x)' \;\Rightarrow$

   $\left((e^x - x)\,f'(x)\right)' = (e^x)' \;\Rightarrow\; (e^x - x)\,f'(x) = e^x + c \overset{(*)}{\Rightarrow}$

   $f'(x) = \dfrac{e^x + c}{e^x - x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

   Για $x = 0$ προκύπτει $0 \overset{(2)}{=} f'(0) = \dfrac{e^0 + c}{e^0 - 0} \;\Rightarrow\; c = -1$.

Άρα $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \dfrac{(e^x - x)'}{e^x - x} = \big(\ln(e^x - x)\big)' \ \Rightarrow$
$f(x) = \ln(e^x - x) + c_1 \,, \ \ x \in \mathbb{R}\,.$

Για $x = 0$ προκύπτει $0 \overset{(2)}{=} f(0) = \ln(e^0 - 0) + c_1 \ \Rightarrow \ c_1 = 0\,.$

Άρα $f(x) = \ln(e^x - x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$ $\square$

Γ2. $f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ e^x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0.$

Λόγω της $(*)$ προκύπτει ο παραπλεύρως πίνακας μονοτονίας της f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	0 Ο.Ε.	↗	

Γ3. $f''(x) = \dfrac{-x\,e^x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = -x\,e^x + 2e^x - 1\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στό $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = e^x\,(1 - x)\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$

$g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1\,.$

Προκύπτει ο παραπλεύρως πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων τής συνάρτησης g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗	Ο.Μ.	↘	

Επειδή $g(-2) = -e^{-2}\,(e^2 - 4) < 0$, $g(1) = e - 1 > 0$ και $g(2) = -1 < 0$, από το θεώρημα Bolzano, γιά την συνάρτηση g στά διαστήματα $[-2, 1]$ και $[1, 2]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\rho_1 \in (-2, 1)$ και $\rho_2 \in (1, 2)$, τέτοια ώστε $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$. Απο την μονοτονία της g έπεται ότι υπάρχουν ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 τής g.

Προκύπτει ο παραπλεύρως πίνακας για το πρόσημο τής g, η οποία έχει το ίδιο πρόσημο με την f'', αφού $f''(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$, όπου, επίσης, φαίνεται ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία καμπής για την συνάρτηση f. $\square$

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$-$	
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$	

Γ4. Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu\, x$, είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στό διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$, με παράγωγο $h'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu\, x.$

Ισχύουν: $h(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu\, 0 = -1 < 0$ και $h\big(\frac{\pi}{2}\big) = f\big(\frac{\pi}{2}\big) - \sigma\upsilon\nu\, \frac{\pi}{2} =$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$, αφού η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στό $x = 0$.
Επομένως $h(0)\,h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
Επειδή $h'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu\, x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα τής h στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ή ισοδύναμα, η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu\, x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

4. Για τίς συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad g(x) > 0 \qquad (1)\,,$$
$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\, dt \qquad (2)\,,$$
$$\frac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}\, dt \qquad (3)\,.$$

Δ1. Η (2) γίνεται $f(x) = 1 - e^{2x} \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\, dt = 1 - \int_0^{-x} \frac{e^{2(t+x)}}{g(x+t)}\, dt \overset{\substack{u=x+t \\ du=dt}}{\equiv}$
$1 - \displaystyle\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\, du = 1 + \int_0^x \frac{e^{2t}}{g(t)}\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Ομοίως από την (3) προκύπτει ότι $g(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{f(t)}\, dt\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

Επειδή οι συναρτήσεις $\dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ και $\dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ είναι συνεχείς σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, οι συναρτήσεις $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{g(t)}\, dt$ και $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}}{f(t)}\, dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Άρα και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με παραγώγους $f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ (4) και $g'(x) = \dfrac{e^{2x}}{f(x)}$, αντίστοιχα.

Αλλά τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)\,g(x) = e^{2x} = f(x)\,g'(x) \;\Rightarrow$

$$f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$$
$$\Rightarrow\; \frac{f(x)}{g(x)} = c \;\Rightarrow\; f(x) = c\,g(x)\,.$$

Για $x = 0$, από τίς (2) και (3) προκύπτει $f(0) = g(0) = 1$ (5).
Επομένως $1 = f(0) = c\,g(0) = c$ και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) = g(x)$. $\square$

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com

Δ2. Επειδή $f(x)=g(x)$, η (4) γίνεται $f(x)\,f'(x)=e^{2x} \;\Rightarrow\; \big(f^2(x)\big)'=\big(e^{2x}\big)' \;\Rightarrow$ $f^2(x)=e^{2x}+c_2\,.$

Για $x=0$, προκύπτει $f^2(0)=e^{2\cdot 0}+c_2 \overset{(5)}{\Rightarrow} 1=1+c_2 \;\Rightarrow\; c_2=0\,.$

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f^2(x)=\big(e^x\big)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)=e^x\,.$ □

Δ3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(e^x)}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{1}{t}}{e^t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{e^{-t}}{t}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{(e^{-t})'}{(t)'}=\lim_{t\to-\infty}\frac{-e^{-t}}{1}=-\lim_{t\to-\infty}e^{-t}\overset{u=-t}{=}-\lim_{u\to+\infty}e^u=-\infty\,.$ □

Δ4. Επειδή, για κάθε $t\in\mathbb{R}$, ισχύει $e^{t^2}>0$, έπεται ότι για $x\in[0,1)$, ισχύει $\displaystyle\int_x^1 e^{t^2}\,dt>0 \;\Rightarrow\; F(x)=-\int_x^1 f\big(t^2\big)\,dt<0\,.$

Επομένως το εμβαδόν τού χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση τής F, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, ισούται με

$\displaystyle \mathrm{E}=\int_0^1|F(x)|\,dx=\int_0^1 -F(x)\,dx=-\int_0^1\left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)dx=$

$\displaystyle -\int_0^1\left((x)'\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)dx=-\left[x\int_1^x e^{t^2}\,dt\right]_0^1+\int_0^1 x\left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)'dx=$

$\displaystyle -1\int_1^1 e^{t^2}\,dt+0\int_1^0 e^{t^2}\,dt+\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx\overset{\substack{t=x^2\\ \frac{1}{2}\,dt=x\,dx}}{=}\int_{0^2}^{1^2}e^t\,\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1=$

$\displaystyle\frac{e-1}{2}\,.$ □

Λύσεις - επιμέλεια:
Γρηγορίου Κωστάκου
grigkost@gmail.com