ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

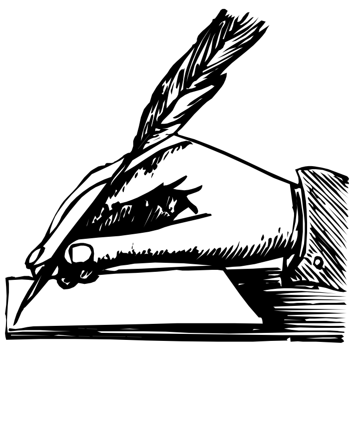
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

Λύσεις των θεμάτων



Έκδοση 1η **(25/05/2015, 22:00)**

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=49688

Συνεργάστηκαν οι:
*Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Χρήστος Κυριαζής, Στάθης Κούτρας
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος,
Μπάμπης Στεργίου, Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης,
Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης*

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α + βi και γ + δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ 192.

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ 188.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 259.

Α4. **α)** **Λάθος**. Σχολικό βιβλίο σελ 144.

β) **Σωστό**. Σχολικό βιβλίο σελ 259.

γ) **Λάθος.** Σχολικό βιβλίο σελ 225.

δ) **Σωστό.** Σχολικό βιβλίο σελ 332.

ε) **Σωστό**. Σχολικό βιβλίο σελ 178.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4 \le w \le 4$

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3 είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Β1. Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned}|z-4|=2|z-1| &\Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2\\ &\Leftrightarrow (z-4)\overline{(z-4)}=4(z-1)\overline{(z-1)}\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4\left(z\bar{z}-z-\bar{z}+1\right)\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4\\ &\Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|=2\end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

Β2 α. Είναι $|z_1|=2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow z_1=\dfrac{4}{\bar{z}_1}$. Όμοια $z_2=\dfrac{4}{\bar{z}_2}$

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)=2\left(\frac{\frac{4}{\bar{z}_1}}{\frac{4}{\bar{z}_2}}+\frac{\frac{4}{\bar{z}_2}}{\frac{4}{\bar{z}_1}}\right)=2\left(\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right)=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\bar{w}.$$

Άρα $w\in\mathbb{R}$.

β. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le\left|\frac{2z_1}{z_2}\right|+\left|\frac{2z_2}{z_1}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le 2\cdot\left|\frac{z_1}{z_2}\right|+2\cdot\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|\le 2\cdot\frac{|z_1|}{|z_2|}+2\cdot\frac{|z_2|}{|z_1|}$$

$$\Leftrightarrow |w|\le 2\cdot\frac{2}{2}+2\cdot\frac{2}{2} \Leftrightarrow |w|\le 2+2$$

$$\Leftrightarrow |w|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4 \quad \text{αφού } w\in\mathbb{R}.$$

Β3. Είναι

$$w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1} \Rightarrow -4=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1} \Rightarrow -2=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$$

$$\Rightarrow -2z_1\cdot z_2=z_1{}^2+z^2 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=0$$

$$\Rightarrow z_1+z_2=0 \Rightarrow z_1=-z_2.$$

Επομένως :

- $(AB)=|z_1-z_2|=|-z_2-z_2|=|-2z_2|=2|z_2|$
- $(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1(1-2i)|=|z_1|\sqrt{1^2+(-2)^2}=|z_1|\sqrt{5}$
- $(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|-z_1(1-2i)|=|-z_1|\sqrt{1^2+(-2)^2}=|z_1|\sqrt{5}$

Άρα

$$|z_1-z_3|=|z_2-z_3| \Rightarrow (A\Gamma)=(B\Gamma).$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^x, x^2+1 με:

$$f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Είναι προφανές ότι $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}>0$ για κάθε $x\neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x=1$, τελικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)=\left(e^x\,\dfrac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)=0$

Οι συναρτήσεις e^x, x^2+1, είναι παραγωγίσιμες και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$, και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)$ υπάρχει, όπως φαίνεται παρακάτω, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα De L' Hospital.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}$.

Επίσης οι συναρτήσεις e^x, $2x$, είναι παραγωγίσιμες και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$, και το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{2x}\right)$ υπάρχει, όπως φαίνεται παρακάτω, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα De L' Hospital.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

Γ2. Είναι :

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)\qquad(1)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα , είναι και $1-1$.Επομένως η (1) είναι ισοδύναμη με την

$$e^{3-x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Όμως $\dfrac{e^3}{2}\in f(R)=(0,+\infty)$, οπότε υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x_o)=\dfrac{e^3}{2}$

Επιπλέον η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, άρα λαμβάνει κάθε τιμή της ακριβώς μια φορά, οπότε η ανωτέρω εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα, τη x_0.

Γ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x>0$ είναι

$$2x\le t\le 4x\Rightarrow f(2x)\le f(t)\le f(4x)\Rightarrow f(4x)-f(t)\ge 0.$$

και η ισότητα δεν ισχύει παντού στο $[2x,4x]$.

Επομένως

$$\int_{2x}^{4x}[f(4x)-f(t)]dt>0\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(4x)dt-\int_{2x}^{4x}f(t)dt>0\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<\int_{2x}^{4x}f(4x)dt$$

$$\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<f(4x)\cdot[1]_{2x}^{4x}\Leftrightarrow\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf(4x).$$

Γ4. Επειδή $\int_{2x}^{4x}f(t)dt=\int_0^{4x}f(t)dt-\int_0^{2x}f(t)dt$ άρα $\left(\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'=(4x)'f(4x)-(2x)'f(2x)=4f(4x)-2f(2x)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x)=\frac{x\left(\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)'-(x)'\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=\frac{x\left(4f(4x)-2f(2x)\right)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2},$$

$$>\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-2xf(4x)}{x^2}=\frac{2\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x}$$

λόγω της ανισότητας που αποδείξαμε στο ερώτημα (Γ3).

Για $x>0$ ισχύει ότι $f(4x)>f(2x)$ λόγω της μονοτονίας της f .Άρα $\dfrac{2\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x}>0\Rightarrow g'(x)>0$,

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x}$.

Οι συναρτήσεις $\int_{2x}^{4x} f(t)dt,\ x$, είναι παραγωγίσιμες , επομένως και συνεχείς. Άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \int_0^0 f(t)dt = 0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

και το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{x'}$ υπάρχει , όπως φαίνεται παρακάτω. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα De L' Hospital . Άρα,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1} = 4f(0)-2f(0) = 2 = g(0),$$

αφού η f είναι συνεχής.

Συνεπώς η g είναι συνεχής στο 0 και στο $(0,+\infty)$ (ως παραγωγίσιμη σε αυτό) άρα τελικά είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Επίσης $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ άρα τελικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία y = x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ:

Δ1. Η δοθείσα σχέση γράφεται $\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$, οπότε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Από την τελευταία, αν θέσουμε $x=0$, βρίσκουμε $c=0$ κι έτσι αυτή γράφεται

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x.$$

Είναι

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{2f(x)}-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=1+x^2 \quad (1)$$

Έστω $H(x)=e^{f(x)}-x,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε η σχέση (1) γράφεται $H^2(x)=1+x^2$. Είναι επομένως $H(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αλλά $H(0)=1>0$, όποτε είναι $H(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως η σχέση (1) δίνει :

$$H(x)=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), x\in\mathbb{R}$$

Δ2α. Είναι $f'(x)=\dfrac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Η f' είναι με τη σειρά της παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f''(x)=\dfrac{-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$.

Για $x>0$ είναι $f''(x)<0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Για $x<0$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$.

Στο $x=0$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής το σημείο $(0,f(0))$ δηλαδή το $O(0,0)$.

Δ2β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$ είναι $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=x$.

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$, είναι $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$
\begin{aligned}
E&=\int_0^1 (x-f(x))dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 f(x)dx=\\
&=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1-\int_0^1 (x)'f(x)dx=\frac{1}{2}-\left[xf(x)\right]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx=\\
&=\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-f(1)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\\
&=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Δ3. Αφού $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για $x>0$ είναι $f(x)>0$.

Έστω L το ζητούμενο όριο, το οποίο γράφεται

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln f(x)\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{f(x)}\big(f(x)\ln f(x)\big).$$

- Η συνάρτηση στον εκθέτη είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)=e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1=0,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$$

Το όριο οδηγεί στη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ και ισχύουν οι προϋποθέσεις εφαρμογής του κανόνα De L' Hospital

όπως προκύπτει εκ του αποτελέσματος . Είναι λοιπόν :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\big(f(x)\big)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{\big(f(x)\big)'}=\frac{e^{\int_0^0 f^2(t)dt}\cdot f^2(0)}{\frac{1}{\sqrt{0^2+1}}}=0.$$

Επίσης είναι

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\ln f(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

- Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(x)\big)=f(0)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\ln\big(f(x)\big)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$, όπως φαίνεται παρακάτω. Έτσι, σύμφωνα με κανόνα De L' Hospital ,

είναι :

$$\lim_{x\to 0^+}\big(f(x)\ln f(x)\big)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to 0^+}(-f(x))=0$$

Άρα το ζητούμενο όριο $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln f(x)\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{f(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\big(f(x)\ln f(x)\big)=0\cdot 0=0.$

Δ4. Στο διάστημα (2, 3) είναι :

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0\Leftrightarrow (x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^x f^2(t)dt\right)=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση

$$G(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right),\ x\in[2,3].$$

Η G είναι συνεχής στο [2, 3] , αφού οι εμφανιζόμενοι όροι είναι συνεχείς συναρτήσεις, ως παραγωγίσιμες.

Είναι $G(2)=3\int_0^2 f^2(t)dt-8$ και $G(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$.

- Είναι $f(t)\le t, t\in[0,2]$, οπότε $f^2(t)\le t^2 \Rightarrow t^2-f^2(t)\ge 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$. Άρα

$$\int_0^2 (t^2-f^2(t))dt>0\Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Rightarrow G(2)<0.$$

- Όμοια είναι $f(t)\le t, t\in[0,1]$, οπότε $f(t^2)\le t^2 \Leftrightarrow t^2-f(t^2)\ge 0, t\in[0,1]$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $t=0$. Επομένως

$$\int_0^1 (t^2-f(t^2))dt>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)dt<\frac{1}{2}\Leftrightarrow G(3)>0$$

Είναι λοιπόν $G(2)G(3)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $G(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$. Συνεπώς και η ισοδύναμη αρχική εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

ΑΛΛΕΣ ΛΥΣΕΙΣ:

B1 Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, οπότε

$$\begin{aligned}
|z-4|=2|z-1| &\Leftrightarrow |x+yi-4|=2|x+yi-1|\\
&\Leftrightarrow |(x-4)+yi|=2|(x-1)+yi|\\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}\\
&\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=4\left[(x-1)^2+y^2\right]\\
&\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2=4\left[x^2-2x+1+y^2\right]\\
&\Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2=4x^2-8x+4+4y^2\\
&\Leftrightarrow 12=3x^2+3y^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=4.
\end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 2.

B2β. Αν $z_1=x_1+y_1i, z_2=x_2+y_2i, x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$ με αντίστοιχες εικόνες $A(z_1), B(z_2)$, έχουμε ότι:

$$w=2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)=\cdots=x_1x_2+y_1y_2=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\,\text{συν}AOB,$$

οπότε $|w|=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|\,|\text{συν}AOB|\le|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|$ απ' όπου

$$-\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\le w\le\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\Leftrightarrow -4\le w\le 4.$$

Β2β. $w=2\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}\right)=2\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{\frac{4}{\overline{z_1}}}{\frac{4}{\overline{z_2}}}\right)=2\left[\dfrac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}\right]=4\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $-4\le 4\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\le 4 \Leftrightarrow \left|4\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right|\le 4 \Leftrightarrow \left|\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right|\le 1$

Όμως $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=\dfrac{4}{4}=1$ άρα ο μιγαδικός $\dfrac{z_1}{z_2}$ κινείται στο μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2=1$

άρα $x^2=1-y^2\le 1$ άρα $|x|\le 1$ δηλαδή το πραγματικό μέρος του $\dfrac{z_1}{z_2}$ ικανοποιεί την $\left|\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right|\le 1$.

Γ3. Έστω $x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(u)=\int_0^u f(t)dt,\ u\in[2x,4x]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [2x,4x], οπότε η F είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, με $F'(u)=f(u)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x}=F'(\xi)\Rightarrow \int_0^{4x} f(t)dt-\int_0^{2x} f(t)dt=2xf(\xi)\Rightarrow$$

$$\int_0^{4x} f(t)dt+\int_{2x}^{0} f(t)dt=2xf(\xi)\Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt=2xf(\xi).$$

Είναι $2x<\xi<4x$ και η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα $f(\xi)<f(4x)$.

Επομένως $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$.

Δ1. Όμοια όπως στην πρώτη λύση βρίσκουμε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-e^{-x}$ με $g'(x)=e^x+e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και "1−1".

Παρατηρούμε ότι $g\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)=e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}-e^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}}=x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=$

$$=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+x^2+1+2x\sqrt{x^2+1}-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=2x$$

Οπότε η (1) γράφεται: $g(f(x))=g\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\overset{g:"1-1"}{\Leftrightarrow} f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

Δ3. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει παράγωγο $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε για $x>0$ έχουμε $f(x)>f(0)=0$ συνεπώς $|f(x)|=f(x)$ για $x\in(0,+\infty)$. Το όριο γράφεται:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left[\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}x\ln f(x)\right]$ όπου $F(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $F'(x)=f^2(x)F(x)$

Όμως $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=0$ και επίσης

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln f(x))=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0\cdot1=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=0$.

Δ3. Με $f^2(t)$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ (δύναμη συνεχούς και $0\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f^2(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής και με $m(x)=e^x$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η $(m\circ F)(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο μηδέν) οπότε

$$\lim_{x\to0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)=e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1=e^0-1=1-1=0$$

και επειδή $f(x)>0$ για $x>0$ άρα

$$\lim_{x\to0^+}\left[\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\ln f(x)\right]\overset{(*)}{=}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$$

(*) θέτουμε $u=f(x)$ οπότε $u_0=\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ διότι η f είναι συνεχής.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}}\right]$$

Και με τις συναρτήσεις $e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1,\ \dfrac{1}{\ln f(x)}$ παραγωγίσιμες είναι

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln f(x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}\right)'}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)'}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}=\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\cdot\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right]$$

Επειδή οι συναρτήσεις $f'(x)$, $e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ είναι συνεχείς στο 0 άρα

$$\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\right)=-\frac{f'(0)}{e^{\int_0^0 f^2(t)dt}}=-\frac{1}{e^0}=-\frac{1}{1}=-1$$

και

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2\right]'}{\left(f^3(x)\right)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{3f^2(x)\cdot f'(x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(x)}{3f^2(x)\cdot f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{3\cdot f'(x)}=\frac{2\left(e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^0 f^2(t)dt}}{3\cdot f'(0)}=\frac{2\cdot0\cdot1}{3\cdot1}=0$$

Οπότε τελικά για το ζητούμενο όριο (από όρια και πράξεις) έχουμε:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\ln f(x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}\right)'}=\ldots=\lim_{x\to0^+}\left[-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\cdot\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right]=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\right)\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}=-1\cdot0=0$$