

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ “ΠΑΙΔΕΙΑ”
25ης Μαρτίου 25 - Ν. Μηχανιώνα
Γραπτή εξέταση στα μαθηματικά κατεύθυνσης της γ' Λυκείου
05/10/2014
2η ομάδα θεμάτων

1ο ΖΗΤΗΜΑ

- A. α) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της;
(5 μονάδες)
- β) Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta \cdot i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να γράψετε τους μιγαδικούς $-z$, \bar{z} και $-\bar{z}$.
(3 μονάδες)
- γ) Πότε μία συνάρτηση f αντιστρέφεται;
(3 μονάδες)
- δ) Πότε ένα σημείο $M(x_M, y_M)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων, f και g ;
(4 μονάδες)
- B. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ), τις παρακάτω προτάσεις:
- (i) Οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, είναι ίσες.
- (ii) Το γινόμενο δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι φανταστικός αριθμός.
- (iii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , με τύπο $f(x) = \ln|x|$, είναι το \mathbb{R} .
- (iv) Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|^2 = z^2$.
- (v) Αν $f(x) = x^3$, τότε $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
(10 μονάδες)

2ο ΖΗΤΗΜΑ

- A. Να βρείτε τους $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει $(2 - 3i)^2 + (x - yi) = 2x + yi$.
(10 μονάδες)
- B. Αν $|z + 1 + 2i| = 4$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων, των παραπάνω μιγαδικών αριθμών z .
(6 μονάδες)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ “ΠΑΙΔΕΙΑ”
25ης Μαρτίου 25 - Ν. Μηχανιώνα
Γραπτή εξέταση στα μαθηματικά κατεύθυνσης της γ' Λυκείου
05/10/2014
2η ομάδα θεμάτων

Γ. Έστω $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, και $w = \frac{z+1}{z}$.

α) Να φέρετε το μιγαδικό w σε μορφή $\alpha + \beta \cdot i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, και να βρείτε τα $Re(w)$ και $Im(w)$.

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων, $M(z)$, των μιγαδικών αριθμών z , όταν ο w είναι πραγματικός αριθμός.

(4 μονάδες)

3ο ΖΗΤΗΜΑ

A. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \sqrt{x-4}$ και $g(x) = \sqrt{4-x^2}$. Να βρείτε, αν ορίζονται, τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

(12 μονάδες)

B. Έστω η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(3 μονάδες)

(ii) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

(4 μονάδες)

(iii) Να βρείτε τη αντίστροφη της, f^{-1} .

(6 μονάδες)

4ο ΖΗΤΗΜΑ

A. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{\alpha \cdot x^3 - \alpha^2 \cdot x^2 + \alpha \cdot x - \alpha^2}{x^2 - \alpha^2} \right)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(4 μονάδες)

β) $\lim_{h \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x-2}}{h+2} \right)$, όπου $x > 2$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ “ΠΑΙΔΕΙΑ”
25ης Μαρτίου 25 - Ν. Μηχανιώνα
Γραπτή εξέταση στα μαθηματικά κατεύθυνσης της γ' Λυκείου
05/10/2014
2η ομάδα θεμάτων

(4 μονάδες)

B. Έστω η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{|x| - x^2}{x^2 - 2|x| + 1} + \frac{1 - |x|}{1 - x^2}$.

(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

(3 μονάδες)

(ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της.

(4 μονάδες)

Γ. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} . Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $M(3,2)$ και $N(5,9)$,

α) να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ,

(4 μονάδες)

β) να λύσετε την εξίσωση $f\left(2 + f^{-1}(x^2 + x)\right) = 9$ και,

(3 μονάδες)

γ) να λύσετε την ανίσωση $f\left(f(x^2 - 4x) - 6\right) < 2$.

(3 μονάδες)